



Rapport de Recherche

MODÈLES DÉFORMABLES CONTRAINTS EN RECONSTRUCTION D'IMAGES TOMOGRAPHIQUES

Pierre CHARBONNIER, Gil GAULLIER, Alban FOULONNEAU, Fabrice HEITZ

N° RR-PC01-10

Décembre 2010

Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection,
UMR 7005, CNRS-UDS Pôle API, Bd Sébastien Brant BP 10413,
67412 ILLKIRCH CEDEX, FRANCE

Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées, ERA 27 LCPC,
11 rue Jean Mentelin BP9, 67035 STRASBOURG CEDEX 2, FRANCE

Résumé

Dans ce rapport, nous nous intéressons au problème de la reconstruction d'images à partir de projections intégrales, ou imagerie tomographique. Il s'agit d'un problème *mal-posé* par nature. Les techniques pixelliques régularisées de reconstruction présentent des artefacts dans le cas d'un nombre réduit de projections. Les méthodes orientées objet, qui reconstruisent les formes en optimisant leur frontière, introduisent un double niveau de régularisation : elles se basent sur un modèle d'intensité des objets et du fond et pénalisent la longueur de la courbe en évolution. Cette dernière contrainte n'est pas toujours appropriée, selon les formes et les topologies des objets à reconstruire. Pour pallier cet inconvénient, nous proposons d'introduire un *a priori* de forme de haut niveau dans le cadre de la reconstruction tomographique par contours actifs. Notre descripteur de forme, compact et hiérarchique, repose sur les moments de Legendre et peut être rendu invariant aux transformations affines. Plusieurs objets de référence peuvent également être considérés pour gérer des variations de forme. Les résultats expérimentaux obtenus sur données synthétiques montrent l'efficacité de cet *a priori*, notamment pour des nombres réduits de projections bruitées.

Mots-clefs

Reconstruction, contours actifs, approches région, contrainte de forme, moments de Legendre.

Remerciements

Ce travail a bénéficié du soutien d'un contrat doctoral financé par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées et d'un contrat doctoral co-financé par le LCPC et la Région Alsace.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Reconstruction tomographique	2
2.1	Modélisation	2
2.2	Méthodes pixelliques d'inversion	3
2.2.1	Méthodes analytiques	3
2.2.2	Méthodes discrètes	4
2.2.3	Méthodes régularisées	5
2.2.4	Régularisation semi-quadratique et préservation des discontinuités	6
3	Tomographie basée objet	7
3.1	Etat de l'art	7
3.2	Reconstruction par évolution de forme	7
4	Introduction de contraintes de forme	10
4.1	Contraintes de forme en segmentation	10
4.2	Contrainte de forme multi-références et invariance géométrique	11
4.2.1	Représentation des formes	11
4.2.2	Invariance géométrique intrinsèque	12
4.2.3	<i>A priori</i> multi-référence	13
4.2.4	Implantation de la contrainte	14
4.3	Introduction de la contrainte de forme en reconstruction	15
5	Résultats expérimentaux sur données simulées	16
6	Conclusion, perspectives	17

1 Introduction

En imagerie numérique, l'information recherchée n'est souvent pas disponible directement, mais doit être reconstruite à partir de données issues de capteurs. Dans le domaine médical, par exemple, la reconstruction de cartes tridimensionnelles d'émission (ou de transmission) d'une radiation électromagnétique fournit des informations fonctionnelles utiles au diagnostic. Ces images *tomographiques* doivent être calculées à partir des rayonnements mesurés par des détecteurs en rotation autour du patient. La tomographie est également employée en contrôle non destructif, notamment en génie civil. Dans ce cas, un signal acoustique ou électromagnétique est acquis par un nombre de détecteurs souvent restreint par la géométrie du problème, après interaction avec les objets d'intérêt. On reconstitue alors une cartographie du sous-sol, par exemple, pour y localiser des interfaces, des cavités ou des objets enfouis.

La plupart des problèmes inverses en reconstruction d'images, comme la tomographie, sont *mal-posés*, au sens de Hadamard [43]¹ et nécessitent donc une régularisation. Les techniques initialement proposées, linéaires [70], ont tendance à produire des solutions trop lisses. Des méthodes de régularisation avec prise en compte des discontinuités ont été développées par la suite [38, 39, 13]. Ces dernières permettent une amélioration substantielle de la qualité des images reconstruites, dans lesquelles les contours des objets apparaissent nettement. De telles méthodes utilisent une modélisation locale des contours. C'est pourquoi elles peuvent être prises en défaut lorsque les données disponibles sont éparées ou très bruitées, ou bien lorsque le nombre de projections est faible.

Les méthodes évoquées jusqu'à présent sont *pixelliques*, au sens où elles cherchent à reconstruire les cartes d'intensité comme des images, définies sur une grille discrète. Afin d'obtenir des méthodes toujours plus robustes aux perturbations, l'intérêt se porte, depuis quelques années, sur la reconstruction *basée objet* [65, 26]. Ces méthodes modélisent les formes en tant que telles. La reconstruction est traduite en un problème d'optimisation, qui porte alternativement sur la position des frontières entre objets et sur les paramètres décrivant leur distribution d'intensité. Dans les travaux les plus récents, des modèles non paramétriques de forme, de type contours actifs [48, 8, 10], sont généralement mis en œuvre. Ce type de modèle a déjà montré ses avantages dans le domaine de la segmentation d'images, où il est très largement employé (il s'agit alors de partitionner les images en régions représentant soit des objets d'intérêt, soit le fond). Des outils issus de l'optimisation de forme [1, 22] permettent d'obtenir, de façon simple et rigoureuse, l'équation régissant l'évolution optimale du contour actif. De plus, grâce à l'algorithmique des ensembles de niveaux [58], ces modèles possèdent des capacités de changement de topologie, qui en font un outil attractif pour la gestion d'objets complexes. Les contours actifs orientés régions représentent une voie prometteuse pour la reconstruction orientée objet et apparaissent dans de nombreux travaux récents [26, 68, 24, 9, 60].

L'intérêt principal des méthodes orientées objet est qu'elles imposent un double niveau de régularisation, à travers la modélisation explicite des intensités et des frontières. Cependant, les contraintes portant sur les frontières sont géométriquement assez simples, puisqu'il s'agit le plus souvent de pénaliser la longueur des courbes. Pourtant, dans certaines applications, on possède une connaissance, parfois très

1. Un problème est dit bien posé s'il admet une solution unique et stable vis-à-vis des données. Un problème qui ne respecte pas l'une de ces conditions est dit mal-posé.

précise, de la classe d'objets recherchés. La prise en compte de ces informations de *haut niveau* dans la définition de contraintes de forme a récemment constitué un sujet d'intérêt important dans le contexte de la segmentation d'images [50, 64, 20, 14, 71, 62, 36, 7, 18]. Nous avons, pour notre part, proposé une représentation des formes fondée sur les moments de Legendre de leur fonction caractéristique [32]. Cette approche permet de définir une contrainte de forme indépendante de la topologie des objets, capable de gérer une variété de formes de référence et invariante aux transformations géométriques affines [32, 34]. Dans ce rapport, dont des versions préliminaires ont été publiées dans [37, 12], nous proposons d'introduire notre contrainte de forme en reconstruction tomographique par évolution de courbes et d'évaluer son impact sur la qualité de la reconstruction dans des conditions difficiles.

Ce rapport est organisé de la façon suivante : la section 2 propose un rappel de la modélisation du problème classique de reconstruction tomographique et des principaux algorithmes pixelliques de reconstruction. La section 3 présente les méthodes de reconstruction tomographique orientées objet. Nous donnons, dans la section 4, une description de la contrainte de forme que nous introduisons en reconstruction tomographique. L'apport de cet *a priori* de haut niveau dans le cas de faibles nombres de projections bruitées est illustré expérimentalement, sur données synthétiques, à la section 5.

2 Reconstruction tomographique

2.1 Modélisation

Dans le cadre classique de la tomographie, un rayonnement émis par l'objet observé est recueilli par une barrette de détecteurs en rotation autour de celui-ci. Les projections intégrales ainsi obtenues à la position u pour un angle θ sont données par la *transformée de Radon* du champ d'intensité f , défini sur le domaine Ω :

$$p(\theta, u) = [\mathcal{R}f](\theta, u) = \int_{\Omega} f(x, y) \mathbb{1}_{L_{\theta, u}}(x, y) dx dy \quad (1)$$

où $\mathbb{1}_{L_{\theta, u}} = \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - u)$ est le noyau de projection, ou fonction caractéristique du *rai* de projection $L_{\theta, u}$. En pratique, les projections sont collectées sous forme de vecteur, pour un nombre fini d'angles et de positions. En discrétisant f sous forme d'image et en l'arrangeant en vecteur par ordonnancement lexicographique, on obtient l'écriture discrète de l'équation (1) :

$$p = Rf, \quad (2)$$

où R est l'opérateur matriciel de Radon, dont les entrées correspondent au noyau de projection. Ainsi, en réordonnant chaque ligne de R sous forme d'image, on visualise le *rai* de projection correspondant. L'opérateur adjoint de l'opérateur de Radon est l'opérateur de *rétroprojection*, qui consiste à épandre sur le domaine image les données enregistrées par les capteurs, le long des rais de projection et à sommer ces contributions :

$$\bar{f}(x, y) = [\mathcal{R}^* p](x, y) = \int_{\mathcal{R}(\Omega)} p(\theta, u) \mathbb{1}_{L_{\theta, u}}(x, y) du d\theta. \quad (3)$$

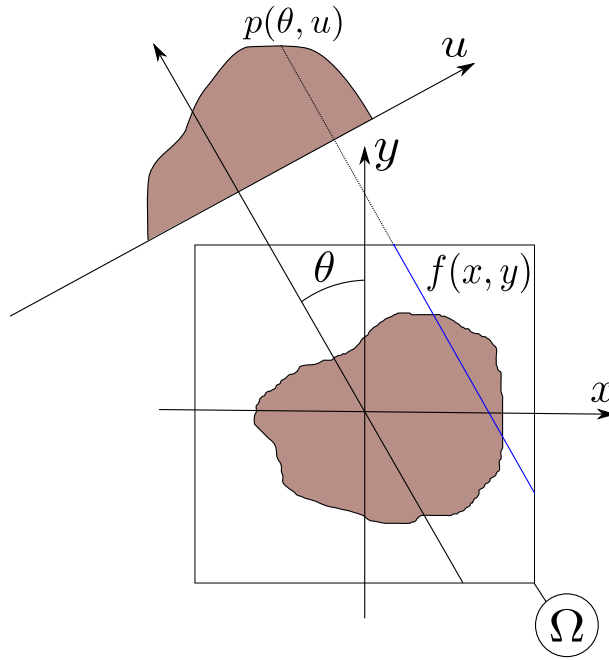


FIGURE 1 – Principe de la transformée de Radon. Un rai d'intégration est tracé en bleu.

Notons que cet opérateur s'écrit, sous forme discrète :

$$\bar{f} = R^T p. \quad (4)$$

Naturellement, l'acquisition des projections est sujette aux perturbations et il est nécessaire d'introduire dans sa modélisation la notion de *bruit*. La procédure d'observation pouvant s'assimiler à un processus de comptage, un modèle de bruit de Poisson est souvent adopté. Cependant, lorsque le taux de comptage (ou nombre de *coups*) est suffisamment important, on assimile les perturbations à un bruit blanc gaussien additif :

$$p = Rf + \eta. \quad (5)$$

C'est le modèle que nous adopterons par la suite (§3), sachant qu'il existe également des algorithmes de reconstruction orientée objet adaptés au bruit de Poisson [9]. La figure 2, partie gauche, montre un exemple d'image binaire de 128×128 pixels, à topologie non triviale, et ses projections bruitées, selon un nombre réduit de directions.

2.2 Méthodes pixelliques d'inversion

2.2.1 Méthodes analytiques

Le problème qui nous intéresse consiste à recouvrer, à partir des données de projection p , une image de la distribution d'intensité f . La transformée de Radon est, en théorie, inversible : la solution est donnée par la rétroprojection de la transformée de Hilbert de la dérivée spatiale des projections. Cette

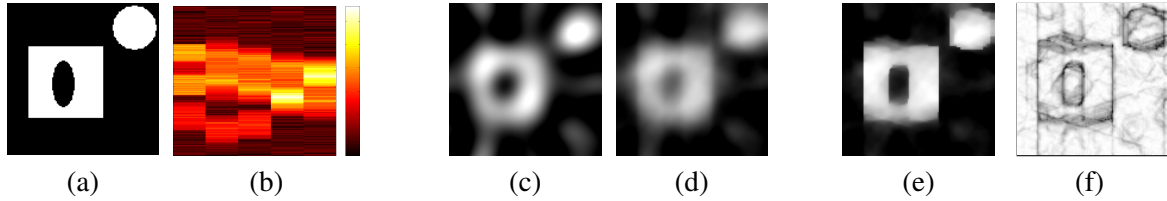


FIGURE 2 – A gauche : données tomographiques simulées. Image originale binaire (128×128) (a) et projections bruitées associées : 5 angles, 185 pixels sur le détecteur, bruit gaussien avec $SNR_{VAR}=15$ dB (b). A droite : résultats de reconstruction *orientée pixel* à partir de ces données. Rétro-projection filtrée (FRP), fréquence de coupure (normalisée) 0,1 (c) ; régularisation de Tikhonov, coefficient de régularisation 1600 (d) ; régularisation semi-quadratique par l’algorithme ARTUR [11, 13], $\phi(u) = 2\sqrt{1+u^2} - 2$, paramètre d’échelle 5, coefficient de régularisation 1600 (e) et carte de la variable de contours (f).

expression est, malheureusement, impraticable à partir d’un ensemble fini de projections. Les méthodes développées pour dépasser cette limitation ont, dans un premier temps, été analytiques. On pourra se référer à [47] par exemple, pour une description de ces méthodes classiques. Certaines se fondent sur l’exploitation de la relation existant entre la transformée de Radon de l’objet et la transformée de Fourier de ses projections², connue sous le nom de *Projection Slice Theorem*. C’est le cas de la méthode *Filtrage-Rétroprojection* (FRP) : on applique d’abord aux projections un filtre passe-haut 1D avant de les épandre sur le domaine image selon (3). Le rôle du filtre est de combattre le flou en étoile lié au principe même de la rétroprojection. Notons que pour éviter une amplification du bruit de mesure, il est nécessaire de couper ce filtre à partir d’une certaine fréquence, en prenant soin de l’apodiser pour éviter les oscillations. On peut [57] voir ce filtrage comme une approximation de la dérivée spatiale des projections et interpréter la FRP comme une approximation de l’inversion analytique. Les méthodes analytiques sont employées de manière routinière en médecine nucléaire. Un exemple de reconstruction par FRP est montré figure 2(c).

2.2.2 Méthodes discrètes

Par la suite ont été développées des techniques entièrement fondées sur la modélisation discrète du problème et permettant, dans certains cas, d’introduire des *a priori* plus forts sur la nature de la solution. On peut citer les techniques algébriques (ART [42] ou SIRT [41] et leurs variantes), qui considèrent la résolution de (2) par la méthode dite de projection ou de Kaczmarz [46]. Celles-ci ne considèrent pas le bruit, ce qui peut provoquer des problèmes de convergence et met à mal la qualité de reconstruction. Afin de tenir compte du bruit, on peut poser le problème de reconstruction sous l’angle du Maximum de Vraisemblance (MV) et estimer f de façon à maximiser $\mathcal{P}(p|f)$. Dans le cas du bruit Gaussien, cela revient à minimiser l’énergie :

$$E_d(f) = \frac{1}{2} \|p - Rf\|^2. \quad (6)$$

Plutôt que de chercher à résoudre les *équations normales* de grandes dimensions associées à la minimisation de (6) :

$$\frac{\partial E_d}{\partial f} = R^T (Rf - p) = 0, \quad (7)$$

2. ou, plus généralement, entre transformée de Radon et toute transformation à noyau de carré intégrable [54].

il est judicieux d'employer un algorithme itératif, de type *descente de gradient*. Etant donnée une estimée initiale f_{MC}^0 , on itère, jusqu'à convergence, selon :

$$f_{MC}^{(k+1)} = f_{MC}^{(k)} + \delta_t R^T \left(p - R f_{MC}^{(k)} \right), \quad (8)$$

où δ_t est le pas de temps de la descente de gradient. Cet algorithme est également appelé algorithme de Landweber. Lorsque le bruit est considéré poissonien, l'application du Maximum de Vraisemblance est moins directe. Néanmoins, le principe d'*Expectation-Maximization* [23] conduit à l'algorithme EM [67], également connu sous le nom d'algorithme de Richardson-Lucy en astronomie [61, 52]. Sous réserve de normalisation des colonnes de la matrice de Radon, R , celui-ci prend la forme d'un algorithme de gradient multiplicatif :

$$f_{EM}^{(k+1)} = f_{EM}^{(k)} \star R^T \left(p \div R f_{EM}^{(k)} \right), \quad (9)$$

où \star représente la multiplication vectorielle point à point et \div , la division vectorielle point à point. Plus lent que la forme additive, cet algorithme a l'avantage de maintenir la positivité de la solution et le total du nombre de coups (i.e. l'intégrale des projections). Ces deux méthodes ont en commun un comportement divergent en présence de données bruitées : l'erreur de reconstruction commence par diminuer, passe par un minimum, avant d'augmenter indéfiniment. Il est donc nécessaire d'arrêter les itérations avant que la solution ne devienne dominée par le bruit et donc inexploitable.

2.2.3 Méthodes régularisées

Le phénomène d'amplification du bruit constaté pour les algorithmes itératifs de reconstruction est directement lié au mauvais conditionnement de l'opérateur R , dont les valeurs singulières peuvent être très proches de zéro. On peut montrer que la méthode consistant à stopper les itérations avant divergence correspond à un filtrage des valeurs singulières de l'opérateur. La valeur de coupure est inversement proportionnelle au numéro de l'itération. Il s'agit, en d'autres termes, d'une façon indirecte de régulariser la solution.

Une approche plus courante de la régularisation consiste à introduire une information *a priori* sur la solution, $\mathcal{P}(f)$, dans un cadre statistique bayésien. On peut alors rechercher la solution qui maximise la distribution *a posteriori*, $\mathcal{P}(p|f)\mathcal{P}(f)$. On parle de reconstruction au sens du Maximum A Posteriori (MAP). Classiquement, l'*a priori* est choisi gaussien :

$$\mathcal{P}(f) \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|Df\|^2 \right), \quad (10)$$

où D est soit l'identité, soit une combinaison d'opérateurs différentiels tels que le gradient, ∇ , ou le Laplacien, Δ . En passant au logarithme dans l'expression de la distribution *a posteriori*, on retrouve, pour un bruit gaussien et un *a priori* gaussien, l'estimateur des moindres carrés pénalisés. Soit, en collectant les constantes :

$$\hat{f}_{TK} = \underset{f}{\operatorname{argmin}} \|p - Rf\|^2 + \lambda^2 \|Df\|^2. \quad (11)$$

Ce critère correspond à la régularisation de Tikhonov [70]. La plupart du temps, on choisit l'opérateur gradient $D = \nabla$. La solution vérifie alors les équations normales :

$$(R^T R - \lambda^2 \Delta) \hat{f}_{TK} = R^T p. \quad (12)$$

L'introduction de l'*a priori* permet d'éviter l'explosion de la solution. Toutefois, les critères quadratiques ont un inconvénient majeur : ils ne distinguent pas les faibles gradients, dus au bruit, des forts gradients, correspondant aux discontinuités de la solution. Les images reconstruites ont donc un aspect flou, comme le montre l'exemple de la figure 2(d).

2.2.4 Régularisation semi-quadratique et préservation des discontinuités

La régularisation avec préservation des discontinuités a été un sujet très actif au début des années 1990. Deux approches ont été développées. La première a consisté à considérer des fonctionnelles à φ -fonctions :

$$\mathcal{J}(f) = \|p - Rf\|^2 + \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi(|\nabla f|), \quad (13)$$

où φ est une fonction non quadratique, dont la forme souhaitable a fait l'objet de nombreuses publications (voir [11] pour un état de l'art sur le sujet). D'autre part, l'approche des frères Geman a consisté à introduire, dans un cadre markovien, des variables binaires [40], ou continues [38, 39], appelées processus de ligne. Elles modélisent explicitement les contours et permettent d'annuler le terme de régularisation aux emplacements de ceux-ci. Ces travaux ont été étendus et unifiés dans [11], où il est montré que les conditions permettant la prise en compte des discontinuités portent sur la *fonction de pondération* $\varphi'(u)/2u$ et non sur φ elle-même :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi'(u)}{2u} = M, \quad 0 < M < +\infty \quad (14)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(u)}{2u} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\varphi'(u)}{2u} \text{ strictement décroissante.} \quad (16)$$

En général, M est choisi égal à 1. Ces conditions impliquent que φ soit quadratique près de l'origine (14) et sous-quadratique à l'infini (15). La condition (16) assure la cohérence du modèle. Par ailleurs, on montre [11] que les fonctions réelles φ paires, croissantes, vérifiant les conditions (14-16), sont telles que :

$$\varphi(u) = \min_{b \in [0,1]} (bu^2 + \Psi(b)), \forall u \quad \text{et} \quad b_{inf} = \frac{\varphi'(u)}{2u}, \quad (17)$$

où Ψ est une fonction strictement convexe définie à partir de φ et b est une variable auxiliaire qui joue le rôle de processus de ligne. Ce résultat généralise un théorème initialement limité aux fonctions à asymptote horizontale, introduit dans [38]. On parle d'extension multiplicative. Notons qu'il existe également, sous les mêmes conditions, une extension additive [11], dont la dérivation a été formalisée à l'origine dans [39].

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, le critère *augmenté* (17) est plus simple à minimiser que le critère initial (13). En effet, à b fixé, il est quadratique en f , ce qui conduit à la résolution d'équations normales linéaires. De plus, lorsque la variable f est fixée, il est convexe en b et son minimum est donné dans (17). Cela suggère une stratégie de *minimisations alternées* par rapport à chacune des variables, en fixant l'autre, qui conduit à l'itération suivante (algorithme ARTUR) :

$$b^{(k+1)} = \frac{\Phi'(|\nabla f_A^{(k)}|)}{2|\nabla f_A^{(k)}|} \quad (18)$$

$$\hat{f}_A^{(k+1)} \text{ solution de : } R^T R f - \lambda^2 \operatorname{div}(b^{(k+1)} \nabla f) = R^T p, \quad (19)$$

dont on peut montrer la convergence vers un minimum (éventuellement local) du critère (13) [11]. Un exemple de reconstruction par l'algorithme ARTUR est montré figure 2. On peut constater que les discontinuités sont mieux préservées. Néanmoins, dans ces conditions difficiles (faible nombre de directions de projection, bruit), le résultat est encore insatisfaisant.

Dans cette approche, les discontinuités sont préservées grâce à une variable de contours, dont la valeur est estimée *localement* à partir du gradient de la solution. Des contraintes peuvent être ajoutées au critère pour donner à cette variable une certaine cohérence spatiale, afin de mieux résister au bruit. Le lecteur souhaitant approfondir ces questions pourra se référer, par exemple, au Chapitre 2 de [57] pour plus d'information. Nous décrivons, au paragraphe suivant, une approche alternative, fondée sur une modélisation globale des frontières, appelée reconstruction basée objet.

3 Tomographie basée objet

3.1 Etat de l'art

Modéliser explicitement les objets que l'on souhaite reconstruire à partir de projections est une approche relativement ancienne. Les premiers travaux se sont surtout concentrés sur l'utilisation de représentations explicites, par des formes géométriques simples telles que des cercles ou des ellipsoïdes [63, 45]), des polygones [15, 53, 4] ou encore des cylindres [6, 5, 28]. L'essor des modèles déformables paramétriques en segmentation s'est accompagné de leur application en reconstruction tomographique [44, 56, 2, 3, 55, 69]. Avec l'apparition de l'algorithme des *Level Sets* [58], les approches par évolution de courbes se sont développées [65, 51, 21, 25, 73, 72, 27, 68, 9]. On trouvera dans [24] une synthèse des méthodes par évolution de courbe employées en tomographie électromagnétique, et dans la thèse de Feng [26] un état de l'art concernant leur application à la tomographie médicale.

3.2 Reconstruction par évolution de forme

Les méthodes orientées objet supposent l'image f composée d'une région de fond Ω_{ext} et d'une région (potentiellement disjointe), Ω_{int} , représentant l'objet (voir figure 3). Le principe général de la méthode consiste à se donner un modèle d'intensité, aussi bien pour la région intérieure que pour la région extérieure. Le problème de reconstruction est alors traduit en un problème d'optimisation, dont

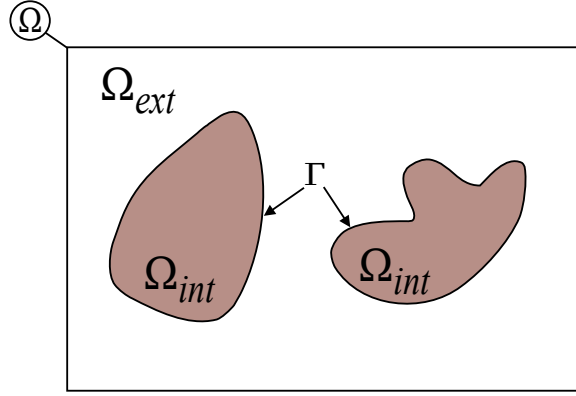


FIGURE 3 – Partitionnement du domaine image, Ω , en une région de fond, Ω_{ext} , et une région correspondant à l’objet à reconstruire, Ω_{int} . Le contour actif, Γ , marque la frontière entre les deux régions. D’après [30].

les inconnues sont la localisation des frontières de la région d’intérêt, $\Gamma = \partial\Omega_{int}$, ainsi que les paramètres du modèle d’intensité. Dans sa version la plus simple, le modèle d’intensité est considéré constant dans chaque région :

$$f(x, y) = f_{int} \cdot \mathbb{1}_{\Omega_{int}}(x, y) + f_{ext} \cdot \mathbb{1}_{\Omega_{ext}}(x, y) \quad (20)$$

où f_{int} et $f_{ext} \in \mathbb{R}$ sont des inconnues et $\mathbb{1}_{\Omega_i}$ est la fonction caractéristique de la région Ω_i . On note que la topologie des objets n’est pas contrainte par cette représentation. Notre but étant de montrer l’utilité de la contrainte de forme en reconstruction, nous nous limiterons au modèle le plus simple pour f . Il existe néanmoins des modèles *multi-phasiques*, susceptibles de prendre en compte plusieurs objets de niveaux d’intensité différents [26, 9]. Il existe également des modèles dans lesquels l’intensité des objets (ou du fond) n’est plus considérée constante, mais polynômiale, en fonction de la variable spatiale [26, 68]. De tels modèles peuvent être utiles dans des applications où des gradients d’intensité sont souvent observés.

Sous hypothèse gaussienne pour le bruit, l’énergie d’attache aux données (6) s’écrit, en tenant compte du modèle d’intensité (20) et de la linéarité de la transformée de Radon :

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{proj}} \left(p_i - f_{int} \cdot F_i - f_{ext} \cdot G_i \right)^2 \quad (21)$$

où $F_i = \int_{\Omega_{int}} \mathbb{1}_{L_i}$ et $G_i = \int_{\Omega_{ext}} \mathbb{1}_{L_i}$ représentent les projections des fonctions caractéristiques des domaines intérieur (resp. extérieur) à la courbe le long du rai i . Dans cette équation, N_{proj} correspond à la taille totale du vecteur de projections, soit le produit du nombre d’angles considérés par le nombre de pixels du détecteur.

L’équation d’évolution du contour associée à la minimisation de (21) se déduit facilement à l’aide des outils de dérivation de forme, ou dérivation eulérienne [1, 22] (voir Annexe) :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \mathbf{V}_d \cdot \mathcal{N}, \quad (22)$$

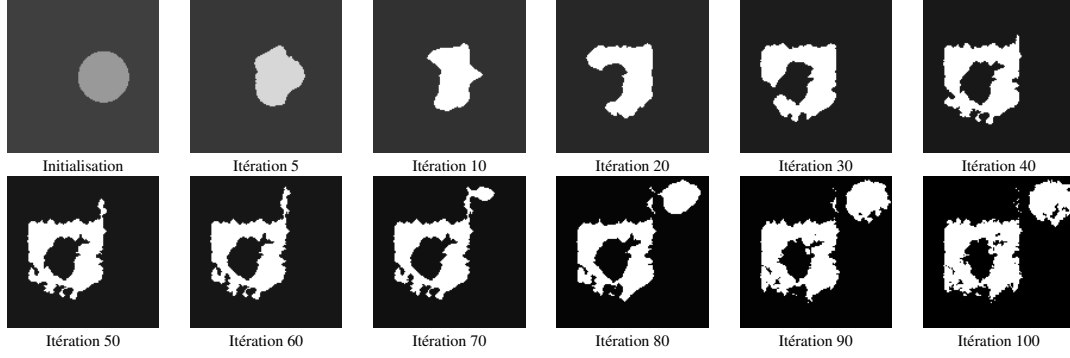


FIGURE 4 – Reconstruction orientée objet de f à partir des projections bruitées p de la figure 2, sur 100 itérations. Les niveaux de gris correspondent aux valeurs de f_{int} et f_{ext} à l’itération considérée.

où \mathcal{N} est la normale au contour orientée vers l’intérieur de la région (*inward normal*). Le champ de vitesse \mathbf{V}_d est défini par :

$$\mathbf{V}_d = (f_{ext} - f_{int}) \sum_{i=1}^{N_{proj}} (p_i - (Rf)_i) \mathbb{1}_{L_i}. \quad (23)$$

La somme qui intervient dans cette expression peut s’interpréter comme une version discrète de l’opérateur de rétroprojection (3), appliqué au vecteur résidu, $p - Rf$. En implantant l’équation d’évolution sous forme de schéma d’Euler explicite en temps, on obtient :

$$\Gamma^{(k+1)} = \Gamma^{(k)} + \delta_t (f_{ext} - f_{int}) R^T (p - Rf(\Gamma^{(k)})). \quad (24)$$

On peut remarquer l’analogie formelle de cette équation avec l’itération de Landweber (8). Les valeurs des paramètres d’intensité du modèle, f_{int} et f_{ext} , dépendent de la position de la frontière et sont remises à jour après chaque évolution du contour actif, en résolvant un système linéaire issu de l’optimisation de (21). Les détails de dérivation sont donnés en Annexe (voir aussi [26, p. 65]).

La figure 4 illustre le fonctionnement de l’algorithme sur les 100 premières itérations de reconstruction orientée objet à partir des données bruitées de la figure 2. L’initialisation est un disque, grossièrement positionné à l’emplacement de la frontière de l’objet à reconstruire - voir aussi la représentation de la figure 5(b). On constate que le carré est d’abord reconstruit. Dans un second temps, une extrusion du contour se produit en direction du disque, qui est reconstruit à son tour. On peut constater sur cet exemple qu’en présence de bruit, le modèle d’intensité n’est pas suffisant pour contraindre la reconstruction : il est également nécessaire de régulariser la frontière. L’approche classique consiste à ajouter à E_d un terme mesurant la longueur de Γ . Cela se traduit par un terme supplémentaire dans l’équation d’évolution, proportionnel à $\kappa \mathcal{N}$ (où κ représente la courbure). Les résultats de la figure 5(d) montrent que la contrainte de longueur de courbe régularise la frontière, mais empêche la reconstruction de la composante circulaire de l’objet dans cette expérience.

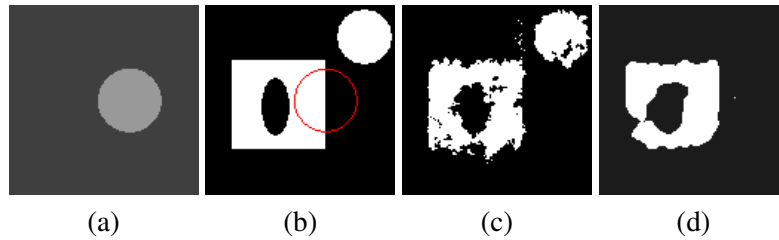


FIGURE 5 – Reconstruction orientée objet à partir des projections de la Fig. 2 : (a) Reconstruction initiale ; (b) Frontière de l’objet initial, superposée sur l’image originale ; Résultat : sans (c) et avec (d) contrainte de longueur.

4 Introduction de contraintes de forme

Comme nous l’avons fait remarquer au paragraphe précédent, la contrainte classique de longueur de frontière n’est pas adaptée à certains types de formes, telles que les polygones ou les formes comprenant des concavités, ce qui peut poser des problèmes en reconstruction. Par ailleurs, dans certaines applications, on possède une connaissance, parfois très précise, de la classe d’objets à reconstruire. C’est pourquoi nous proposons [37] d’incorporer dans le cadre de la reconstruction des contraintes de *haut niveau*, déjà employées avec succès en segmentation d’images.

4.1 Contraintes de forme en segmentation

Bien que des alternatives aient été proposées, dans la grande majorité des approches, la contrainte de forme est implantée comme un terme supplémentaire de l’énergie associée au contour actif [64, 20, 14, 7, 74, 18]. Un paramètre de régularisation permet alors de régler le compromis entre fidélité aux données et *a priori* de forme. La contrainte de forme est, généralement, fondée sur une mesure de similarité entre la forme en évolution et une *forme de référence*. Celle-ci peut représenter une silhouette prédéfinie, comme dans [62, 31]. Dans des applications de suivi, il peut s’agir du résultat de la segmentation à l’image précédente [74, 36]. Le plus souvent, la forme de référence est issue d’une phase d’apprentissage [17, 64, 71, 14, 7].

En ce qui concerne la représentation des formes, la plupart des travaux récents se fondent sur des modèles implicites. En particulier, les cartes de distance signées (CDS) sont très populaires [50, 64, 71, 14, 7, 18]. Cette représentation est liée à l’algorithme des *Level Sets*. Elle est aussi reliée à la notion de fonction caractéristique, laquelle est utilisée par exemple dans [35]. Récemment, Cremers *et al.* ont introduit [19] une fonction codant la probabilité d’appartenance à la forme, version probabiliste de la fonction caractéristique. L’intérêt est que l’espace de représentation des formes ainsi défini est convexe.

Quand on utilise une forme de référence, il est important que le modèle permette un certain degré de variation, de façon à prendre en compte les différences d’aspect rencontrées en pratique. Dans la grande majorité des travaux existants, cet aspect est abordé selon un point de vue statistique. La plupart des modèles sont fondés sur l’Analyse en Composantes Principales (ACP) [16, 50, 71, 7], sous-tendue par un modèle gaussien. Or, les distributions rencontrées en pratique sont très rarement gaussiennes. C’est pourquoi une représentation non paramétrique de la densité de probabilité *a priori* des formes par

fenêtres de Parzen est proposée dans [18] et étendue dans [49] à différentes métriques sur les courbes.

Une seconde question importante est celle de l’alignement entre la forme de référence, généralement définie dans un repère qui lui est propre, et la forme considérée : cette dernière n’a quasiment aucune chance de se trouver dans la même position, orientation et taille dans l’image étudiée. Ces paramètres, dits *paramètres de pose*, sont en général pris en compte de manière explicite dans la définition de la contrainte de forme [50, 64, 62, 71, 14, 7]. Comme ils sont inconnus, cela augmente d’autant le nombre de degrés de liberté du problème d’optimisation, et conduit généralement à des systèmes d’EDP couplées. Une façon de contourner le problème consiste à définir des descripteurs de forme qui soient intrinsèquement invariants aux translations, mises à l’échelle et rotations. C’est ce qui a été fait dans [20] pour des représentations explicites des courbes et dans [31, 18] pour des représentations implicites. Nous avons ensuite étendu [32] cette idée au cas de l’invariance affine (évoqué, mais non implanté dans [18]).

Enfin, une troisième question est celle de la définition d’une mesure de similarité ou de distance entre formes. Plusieurs solutions ont été proposées (*cf.* tableau 2.1 de la thèse d’A. Foulonneau [30]). On trouve principalement des distances quadratiques entre fonctions distances signées [64] ou entre fonctions caractéristiques [62, 18]. Par ailleurs, la carte de distance signée associée à la forme de référence (ou une fonction de celle-ci) peut être intégrée le long du contour [14, 36] ou sur la région intérieure au contour [74].

4.2 Contrainte de forme multi-références et invariance géométrique











La méthode originale que nous avons proposée [31, 32], dans le contexte de la segmentation d’images, combine une représentation paramétrique compacte des formes avec la théorie de l’évolution de courbes pour contraindre l’évolution d’un contour actif.

4.2.1 Représentation des formes

Notre représentation des formes est fondée sur les moments de Legendre de leur fonction caractéristique, rassemblés dans un vecteur appelé *descripteur* : $\lambda = \{\lambda_{p,q}, p+q \leq N\}$, où N est l’ordre des moments, définis par :

$$\lambda_{p,q} = C_{pq} \iint_{\Omega_{int}} P_p(x)P_q(y)dxdy, \quad (25)$$

pour $(x,y) \in [-1,1]^2$. C_{pq} est une constante de normalisation et $P_p(x)$ et $P_q(x)$ sont des polynômes de Legendre. Cette approche, orientée régions, partage avec les représentations implicites par ensemble de niveaux [50, 64, 14, 7], la particularité intéressante de permettre la modélisation d’objets à topologie non triviale. Notre modèle n’est, toutefois, lié à aucune implantation particulière, telle que les ensembles de niveaux. Le choix d’une base orthogonale permet d’obtenir une description hiérarchique des formes, dont la précision augmente avec l’ordre N . Nous avons choisi la base de Legendre pour sa simplicité, mais le principe développé est générique et d’autres bases pourraient être considérées. En pratique, pour choisir l’ordre N , on effectue une étude de l’erreur quadratique moyenne entre la fonction caractéristique de la forme de référence et sa reconstruction, donnée par la formule : $\sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^p \lambda_{p-q,q} P_{p-q}(x)P_q(y)$ (voir Fig. 6).

	$\beta = 0,5$	$\beta = 1$	$\beta = 1,5$
$N = 2$			
$N = 30$			
$N = 50$			

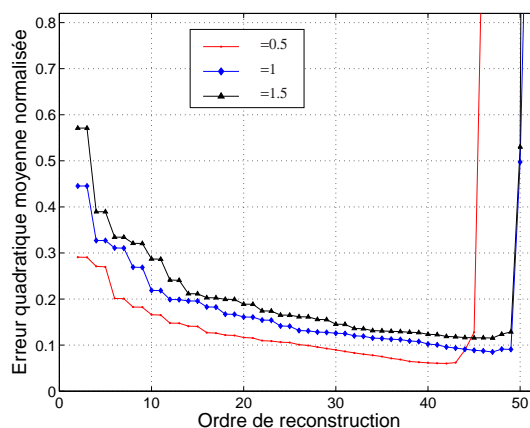


FIGURE 6 – Reconstruction d’une forme de « stop » à partir de ses moments de Legendre invariants en échelle et translation (à gauche) et courbes d’erreur de reconstruction correspondantes, pour différentes valeurs du facteur d’échelle β , défini à l’équation (27) (à droite). On choisira, ici, $\beta = 0,5$ et $N = 42$. D’après [30].

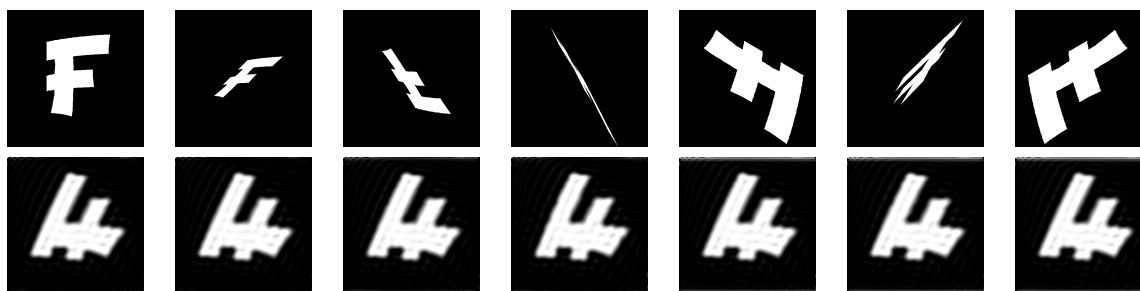


FIGURE 7 – Reconstruction de formes à partir de leurs moments de Legendre invariants par transformation affine. Ligne du haut : images de la lettre F après différentes transformations affines. Ligne du bas : reconstructions utilisant les moments *affine-invariants* jusqu’à l’ordre 50 ($\beta = 1,2$). Ces reconstructions permettent de visualiser la représentation *canonique* de la forme.

4.2.2 Invariance géométrique intrinsèque

Un intérêt important de notre représentation est que l’information géométrique portée par les moments peut être exploitée pour rendre *a priori* invariant aux transformations géométriques, de manière *intrinsèque* [32]. Cela évite le problème d’alignement entre forme de référence et contour en évolution, et permet d’introduire dans le modèle une certaine variabilité, de nature géométrique. Contrairement à la plupart des approches, qui traitent de manière explicite l’estimation des paramètres de pose [50, 64, 62, 71, 14, 7], la nôtre n’impose pas cette phase d’estimation supplémentaire. L’utilisation d’une représentation *canonique* (illustrée sur la figure 7) fournit une équation d’évolution unique. D’un point de vue pratique, le mécanisme de définition des moments invariants se fonde sur la relation

linéaire qui existe entre moments de Legendre et moments géométriques :

$$\lambda_{p,q} = C_{pq} \sum_{u=0}^p \sum_{v=0}^q a_{pu} a_{qv} M_{u,v}, \quad (26)$$

où a_{pu} et a_{qv} sont les coefficients de x^u et y^v dans le développement en série des polynômes de Legendre. L'invariance par translation et changement d'échelle s'obtient en remplaçant dans (26) les moments géométriques (ou réguliers) $M_{u,v}$ par des moments centrés et normalisés, $\eta_{u,v}$, définis par :

$$\eta_{u,v}(\Omega_{int}) = \int_{\Omega_{int}} H_{uv}(x,y) dx dy, \quad \text{avec} \quad H_{uv}(x,y) = \frac{(x-\bar{x})^u (y-\bar{y})^v}{(\beta |\Omega_{int}|)^{\frac{u+v+2}{2}}}, \quad (27)$$

où (\bar{x}, \bar{y}) est le centre de gravité de la forme Ω_{int} , d'aire $|\Omega_{int}|$. Le paramètre β est une constante de normalisation, dont la valeur est déterminée par la même étude expérimentale que pour le choix de N (cf. Fig. 6). De façon analogue, l'invariance aux similarités ou aux transformations affines est obtenue grâce à une définition appropriée de $\eta_{u,v}$, décrite dans [30]. Sans perte de généralité, nous nous restreignons, dans ce rapport, aux invariances par mise à l'échelle et translation. La prise en compte de transformations géométriques complique, certes, l'expression des moments $\eta_{u,v}$, mais le principe de la méthode demeure identique quel que soit le niveau d'invariance considéré. Enfin, on notera que les paramètres d'alignement constituent une sortie de notre algorithme, ce qui peut être intéressant dans certaines applications.

4.2.3 *A priori* multi-référence

La première version de notre modèle affine invariant [32] était limitée à l'utilisation d'une forme unique de référence. Dans le système de représentation par les moments, la contrainte *a priori* était alors définie comme la distance quadratique, en termes de descripteurs, entre la forme en évolution et la forme de référence :

$$E_{prior}(\Omega_{int}) = \|\lambda(\Omega_{int}) - \lambda^{ref}\|^2 = -\log \left[\exp - \|\lambda(\Omega_{int}) - \lambda^{ref}\|^2 \right]. \quad (28)$$

Plus récemment, nous avons proposé dans [33, 34] une extension qui prend en compte, simultanément, un ensemble de N_{ref} formes de référence. Cela revient, d'un point de vue probabiliste, à passer d'un *a priori* gaussien sur le descripteur de la forme en évolution à une loi de mélange de gaussiennes :

$$E_{prior}^{multi}(\Omega_{int}) = -\log \left[\sum_{k=1}^{N_{ref}} \exp - \frac{\|\lambda(\Omega_{int}) - \lambda_{(k)}^{ref}\|^2}{2\sigma^2} \right] + cst. \quad (29)$$

où $\lambda_{(k)}^{ref}$ représente le descripteur associé à la k -ième forme de référence et la variance σ^2 est choisie selon un critère d'erreur de classification [34]. Dans cette approche, chacune des gaussiennes est centrée sur le descripteur d'une des formes de référence considérées, dans l'esprit de [18]. Cela constitue évidemment une seconde façon de prendre en compte la variabilité d'aspect des objets d'intérêt. Le modèle multi-gaussien peut, d'ailleurs, se généraliser facilement à une représentation non paramétrique de la loi *a*

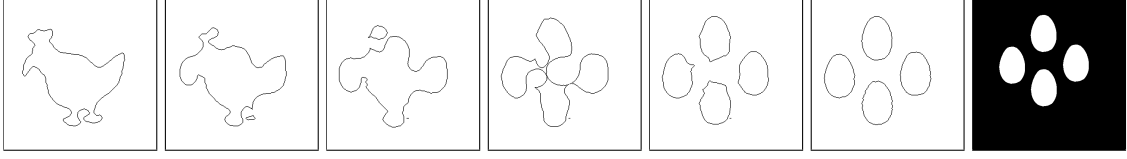


FIGURE 8 – Evolution de courbe avec changement de topologie. A gauche : courbe initiale (d’après [66]) ; au centre : évolution de la courbe ; à droite : forme de référence.

priori des descripteurs, par noyaux de Parzen, comme dans [18, 49]. Naturellement, d’autres types de lois pourraient également être envisagés.

Nous avons montré [34] qu’il était possible de gérer des variations de forme encore plus importantes, en combinant invariance géométrique et modélisation multi-référence. Cela constituait un résultat nouveau dans le domaine. Toutefois, ce type de combinaison conduit à une forte complication des paysages énergétiques et, notamment, à l’apparition de multiples minima locaux, ce qui complique énormément la tâche d’optimisation. Nous avons proposé une stratégie alternative, applicable dans le cas où l’ensemble des déformations géométriques admissibles est limité et connu à l’avance. Il s’agit simplement de prendre en compte les déformations à travers la définition de l’ensemble des formes de référence. On peut alors se limiter à un niveau d’invariance plus faible, ce qui facilite d’autant l’optimisation. Cette stratégie s’est montrée efficace dans le cas de rotations, par exemple. De plus, cela donne accès à des algorithmes plus rapides de calcul des moments [29].

4.2.4 Implantation de la contrainte

La dérivation de l’équation d’évolution du modèle est effectuée dans le formalisme de la dérivation de forme [1]. L’EDP résultante est géométrique, de la forme $\Gamma_t = \mathbf{V}_{prior} \mathcal{N}$. Ainsi, ni le modèle, ni l’équation d’évolution ne sont attachées à un type d’implantation particulier. Par voie de conséquence, des méthodes de type *spline-snakes* [59] aussi bien que la technique classique par courbes de niveaux [58] peuvent être envisagées. Nous utilisons la seconde méthode. Un exemple d’évolution de courbe par minimisation de E_{prior} , pour une forme de référence unique, est montré figure 8. Notons que la possibilité de changement de topologie de la courbe au cours de la segmentation permet de diminuer la sensibilité de l’algorithme à l’initialisation, voire, d’envisager une initialisation automatique. Dans le cadre multi-référence, la minimisation de E_{prior}^{multi} conduit, dans le cas de l’invariance par translation et mise à l’échelle, à la vitesse d’évolution suivante :

$$\mathbf{V}_{prior}^{multi} = \sum_{0 \leq u+v \leq N} A_{uv}^{multi} (H_{uv} + G_{uv}) \quad (30)$$

avec H_{uv} défini dans (27) et :

$$G_{uv} = -\frac{u+v+2}{2|\Omega_{int}|} \eta_{u,v} - \frac{u(x-\bar{x})}{\beta^{\frac{1}{2}} |\Omega_{int}|^{\frac{3}{2}}} \eta_{u-1,v} - \frac{v(y-\bar{y})}{\beta^{\frac{1}{2}} |\Omega_{int}|^{\frac{3}{2}}} \eta_{u,v-1} \quad (31)$$

Cette équation est de la même forme dans le cas mono-référence. La seule différence réside dans le facteur A_{uv}^{multi} , qui s'écrit comme la moyenne pondérée :

$$A_{uv}^{multi} = \left(\sum_{k=1}^{N_{ref}} A_{(k)uv} w_{(k)} \right) / 2\sigma^2 \sum_{k=1}^{N_{ref}} w_{(k)} \quad (32)$$

des facteurs individuels, $A_{(k)uv}$ calculés, pour chaque forme de référence, selon :

$$A_{(k)uv} = 2 \sum_{0 \leq p+q \leq N} (\lambda_{p,q} - \lambda_{(k)p,q}^{ref}) C_{pq} a_{pu} a_{qv}. \quad (33)$$

où les pondérations $w_{(k)}$ sont des fonctions exponentiellement décroissantes de la distance (en termes de descripteurs) entre la forme en évolution et le k -ième modèle de référence :

$$w_{(k)} = e^{\frac{-\|\lambda(\Omega_{int}) - \lambda_{(k)}^{ref}\|^2}{2\sigma^2}}. \quad (34)$$

Ainsi, la force induite par la minimisation de E_{prior}^{multi} est une moyenne pondérée des forces qui attireraient la forme en évolution vers chacune des formes de référence, considérée individuellement. Comme nous l'avons fait remarquer dans [34], utiliser des formes de références multiples plutôt qu'une référence unique a peu d'impact sur le coût calcul global de la méthode puisque la seule modification notable est l'introduction de (32). Notons que notre méthode permet la reconnaissance immédiate de l'objet reconstruit. En effet, dans le contexte multi-référence, la distance entre la forme segmentée et chaque forme de référence est fournie en sortie de l'algorithme.

4.3 Introduction de la contrainte de forme en reconstruction

Nous incorporons la contrainte de forme dans le problème de reconstruction en formant un critère énergétique combinant le terme d'attache aux données (21) et le terme d'*a priori* de forme (29) :

$$E_{\alpha} = (1 - \alpha) \cdot E_d + \alpha \cdot E_{prior}^{multi}, \quad (35)$$

α étant un paramètre de compromis entre *a priori* et attache aux données.

Sur le plan pratique, la reconstruction orientée objet à partir de (35) est implantée à l'aide d'un algorithme par courbes de niveaux autorisant les changements de topologies. Nous utilisons l'aspect hiérarchique de la représentation par moments orthogonaux pour rendre l'optimisation plus efficace. L'optimisation est d'abord réalisée sans contrainte de forme (ou, éventuellement, avec une contrainte de longueur). L'*a priori* de forme est ensuite incorporé en augmentant progressivement l'ordre du modèle utilisé, selon une approche *coarse-to-fine* (du plus grossier au plus fin).

5 Résultats expérimentaux sur données simulées

Afin d'illustrer l'intérêt de notre *a priori* de forme en reconstruction tomographique, nous reprenons les données synthétiques bruitées, à faible nombre de directions de projection, montrées sur la Fig. 2.

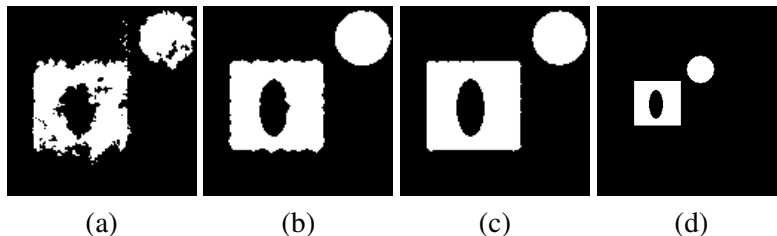


FIGURE 9 – Reconstruction orientée objet à partir des projections de la Fig. 2 : sans *a priori* de forme (a) ; avec contrainte de forme pour $N = 21$ (b), $N = 45$ (c). Forme de référence, de dimensions 512×512 (d).

En initialisant la reconstruction à partir du résultat de la Fig. 5(c), obtenu sans aucune régularisation du contour (soit, $\alpha = 0$), nous introduisons à présent notre *a priori* de forme. Nous considérons ici le cas d'une référence unique, i.e. $N_{ref} = 1$. L'image de référence est présentée Fig. 9(d). Nous mettons à profit la nature hiérarchique de notre descripteur, liée à l'orthogonalité des moments, pour faciliter le processus d'optimisation. Nous choisissons d'abord $\alpha = 0.9$ et $N = 21$, voir Fig. 9(b). Puis, la reconstruction est affinée à l'ordre $N = 45$ et pour la même valeur de α , voir Fig. 9(c).

Afin de montrer l'intérêt de la contrainte de forme dans des situations difficiles, nous faisons ensuite varier soit le nombre d'angles de projection, soit le niveau de bruit (voir figure 10). Dans chaque cas, la qualité de reconstruction non contrainte se dégrade, tandis qu'elle reste à peu près constante lorsqu'on utilise la contrainte de forme, moyennant un réglage de α adapté à la difficulté du problème, voir Tab. 1.

TABLE 1 – Valeurs de α pour les reconstructions présentées sur la 2^{ème} ligne de la Fig. 10.

Nb. angles	6	5	4
$N = 21$	0.8	0.9	0.95
$N = 45$	0.7	0.9	0.85

SNR (dB)	25	20	15
$N = 21$	0.5	0.7	0.9
$N = 45$	0.9	0.9	0.9

Dans les expériences précédentes, l'image de référence était similaire à l'objet recherché à un facteur d'échelle et à une translation près. Toutefois, le modèle peut s'accommoder de variations plus importantes par rapport à la solution idéale, en exploitant son aspect multi-référence. Cela permet de prendre en compte des transformations géométriques plus importantes, telles qu'une rotation 2D. Dans l'expérience illustrée sur la figure 11 à gauche, on effectue des rotations (de -45° à 45° , par pas de 2°) de l'image idéale ayant préalablement subi un changement d'échelle et une translation pour former l'ensemble de formes de référence. La reconstruction reste satisfaisante, bien que l'image idéale n'appartienne pas, dans ce cas, à l'ensemble de formes de références. Le modèle multi-références représente aussi une seconde façon d'introduire de la variabilité par rapport à l'objet idéal (figure 11, à droite). Ainsi l'*a priori* ne nécessite pas une connaissance parfaitement exacte de l'objet : le terme d'attache aux données prend

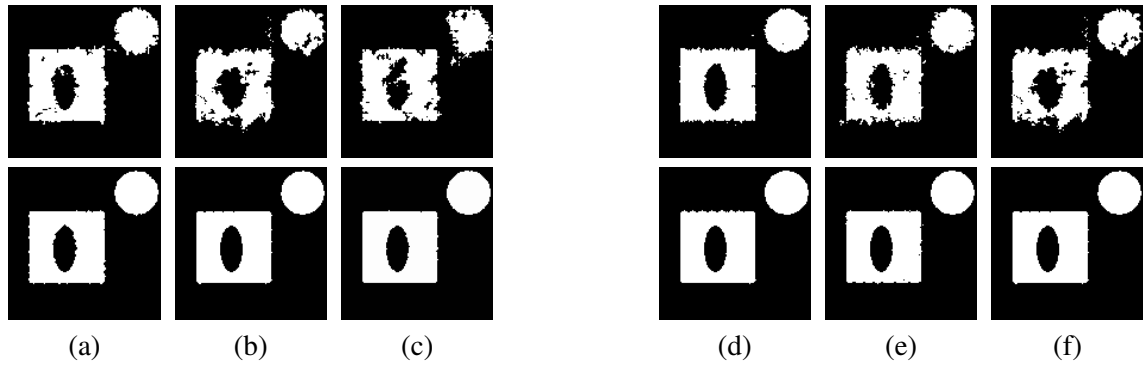


FIGURE 10 – A gauche : reconstructions obtenues pour différents nombres d’angles de projection (avec bruit gaussien, $SNR_{VAR}=15$ dB) ; (a) 6 angles ; (b) 5 angles ; (c) 4 angles. A droite : reconstructions pour différents niveaux de bruit (5 angles de projection) : (d) 25 dB ; (e) 20 dB ; (f) 15 dB. *Ligne du haut* : sans contrainte de forme, *ligne du bas* : avec contrainte de forme, 1 forme de référence, $N = 45$.

le relais aux endroits où la contrainte n’est pas suffisante, au prix de quelques imperfections sur les contours.

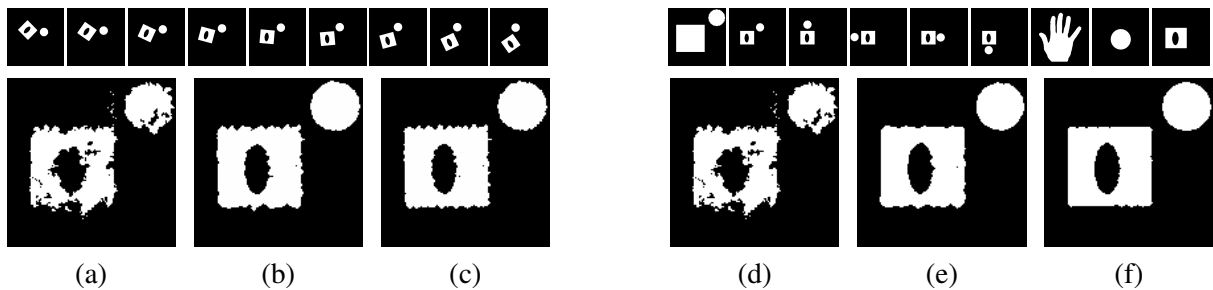


FIGURE 11 – A gauche : ligne du haut, 9 des $N_{Ref} = 46$ images de référence (obtenues par rotation de l’image de la figure 10(g) entre -45° et 45° , tous les 2°) utilisées pour cette expérience. On note que la solution idéale n’appartient pas à l’ensemble de formes de références. Ligne du bas, reconstruction à partir des projections bruitées montrées Figure 2 : (a) sans *a priori* de forme ; (b) en introduisant la contrainte de forme multi-références à l’ordre $N = 21$ avec $\alpha = 0.7$, et (c) à l’ordre $N = 45$ avec $\alpha = 0.5$. A droite : ligne du haut, 9 des images de référence utilisées. Ligne du bas, reconstructions : (d) sans *a priori* de forme ; (e) avec la contrainte multi-références à l’ordre $N = 21$ avec $\alpha = 0.9$, et (f) à l’ordre $N = 45$, avec $\alpha = 0.9$.

6 Conclusion, perspectives

Dans ce rapport, nous avons étudié l’introduction de contraintes de forme de haut niveau (géométriques et topologiques) en reconstruction tomographique binaire orientée objet. A notre connaissance, il s’agit d’une contribution originale dans le domaine. Les résultats obtenus sur données synthétiques sont prometteurs : l’approche proposée se montre efficace pour réduire les artefacts de reconstruction dans des cas difficiles, par exemple pour un nombre de vues très limité et des données bruitées.

Les perspectives de ce travail incluent son extension au cas d’objets non binaires, ce qui pose le problème de l’application simultanée de contraintes multiples. Nous envisageons enfin une application à

des données réelles 3D en tomographie non linéaire (par *temps de vol*) du sous-sol et des structures de génie civil.

Annexes

Dans cette annexe, nous décrivons la dérivation des équations d'évolution associées à la minimisation de l'énergie de reconstruction (21) :

$$E_d(f_{int}, f_{ext}, \Gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{proj}} \left(p_i - f_{int} \cdot F_i - f_{ext} \cdot G_i \right)^2. \quad (36)$$

E_d est une fonction de trois variables : les constantes d'intensité à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet, f_{int} et f_{ext} et la frontière de celui-ci, Γ .

Mise à jour des variables d'intensité

Les conditions d'optimalité par rapport aux deux variables d'intensité s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial E_d(f_{int}, f_{ext}, \Gamma)}{\partial f_{int}} = - \sum_{i=1}^{N_{proj}} F_i \left(p_i - f_{int} \cdot F_i - f_{ext} \cdot G_i \right) = 0 \quad (37)$$

et :

$$\frac{\partial E_d(f_{int}, f_{ext}, \Gamma)}{\partial f_{ext}} = - \sum_{i=1}^{N_{proj}} G_i \left(p_i - f_{int} \cdot F_i - f_{ext} \cdot G_i \right) = 0. \quad (38)$$

En réarrangeant ces conditions, on obtient un système d'équations :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_{proj}} F_i^2 & \sum_{i=1}^{N_{proj}} F_i G_i \\ \sum_{i=1}^{N_{proj}} F_i G_i & \sum_{i=1}^{N_{proj}} G_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{int} \\ f_{ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_{proj}} F_i p_i \\ \sum_{i=1}^{N_{proj}} G_i p_i \end{bmatrix}. \quad (39)$$

La mise à jour des constantes d'intensité est réalisée après chaque évolution du contour actif, en résolvant ce système linéaire. On rappelle que F_i et G_i sont, respectivement, les projections de Radon de la fonction caractéristique de l'objet et du fond : les valeurs de f_{int} et f_{ext} dépendent donc de la position de la frontière, Γ .

Equation d'évolution de la frontière

L'équation d'évolution du contour est obtenue en calculant la dérivée de forme, ou dérivée eulérienne [22], ∇_E du critère (21). Il est nécessaire de tenir compte du fait que les constantes d'intensité dépendent de la position du contour :

$$\begin{aligned} \nabla_E E_d(f_{int}, f_{ext}, \Gamma) &= \sum_{i=1}^{N_{proj}} \left(p_i - f_{int} \cdot F_i - f_{ext} \cdot G_i \right) \\ &\quad \times \left(-f_{int} \cdot \nabla_E F_i - \nabla_E f_{int} \cdot F_i - f_{ext} \cdot \nabla_E G_i - \nabla_E f_{ext} \cdot G_i \right). \end{aligned} \quad (40)$$

On peut réarranger les termes de cette expression sous la forme :

$$\begin{aligned}
\nabla_E E_d(f_{int}, f_{ext}, \Gamma) &= \sum_{i=1}^{N_{proj}} \left(p_i - f_{int} \cdot F_i - f_{ext} \cdot G_i \right) \left(-f_{int} \cdot \nabla_E F_i - f_{ext} \cdot \nabla_E G_i \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_{proj}} F_i \left(p_i - f_{int} \cdot F_i - f_{ext} \cdot G_i \right) \nabla_E f_{int} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_{proj}} G_i \left(p_i - f_{int} \cdot F_i - f_{ext} \cdot G_i \right) \nabla_E f_{ext}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Or, comme remarqué dans [60], d'après les conditions (37) et (38), les deux derniers termes de cette somme sont nuls et on obtient, en utilisant également (20) :

$$\nabla_E E_d(f_{int}, f_{ext}, \Gamma) = - \sum_{i=1}^{N_{proj}} \left(p - (Rf) \right)_i \left(f_{int} \cdot \nabla_E F_i + f_{ext} \cdot \nabla_E G_i \right) \tag{42}$$

Les projections de Radon des domaines intérieur et extérieur à la forme, $F_i = \int_{\Omega_{int}} \mathbb{1}_{L_i}$ et $G_i = \int_{\Omega_{ext}} \mathbb{1}_{L_i}$, sont des intégrales de domaine de fonctions indépendantes de l'évolution du contour. Dans ce cas, la dérivée eulérienne se réduit à un seul terme, qui s'écrit, respectivement :

$$\nabla_E F_i = - \int_{\Gamma(t)} \mathbb{1}_{L_i} \langle \mathbf{V}, \mathcal{N} \rangle ds \quad \text{et} \quad \nabla_E G_i = \int_{\Gamma(t)} \mathbb{1}_{L_i} \langle \mathbf{V}, \mathcal{N} \rangle ds \tag{43}$$

où \mathcal{N} est la normale intérieure à la courbe Γ . Finalement, on peut donc écrire :

$$\nabla_E E_d(f_{int}, f_{ext}, \Gamma) = - \int_{\Gamma(t)} \left(f_{ext} - f_{int} \right) \sum_{i=1}^{N_{proj}} \left(p - (Rf) \right)_i \mathbb{1}_{L_i} \langle \mathbf{V}, \mathcal{N} \rangle ds \tag{44}$$

On en déduit que le champ de vitesse optimal, qui permet de minimiser le plus rapidement possible E_d est :

$$\mathbf{V}_d = \left(f_{ext} - f_{int} \right) \sum_{i=1}^{N_{proj}} \left(p - (Rf) \right)_i \mathbb{1}_{L_i}. \tag{45}$$

Références

- [1] G. AUBERT, M. BARLAUD, O. FAUGERAS et S. JEHAN-BESSON : Image segmentation using active contours : calculus of variations or shape gradients ? *SIAM, Journal on Applied Mathematics*, 63(6):2128–2154, septembre 2003.
- [2] X. BATTLE, G. CUNNINGHAM et K. HANSON : Tomographic reconstruction using 3D deformable models. *Physics in Medicine and Biology*, 43:983–990, 1998.
- [3] X. BATTLE, C. REST, A. TURZO et Y. BIZAIS : Three-dimensional attenuation map reconstruction using geometrical and free-form deformation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(5):404–411, 2000.
- [4] L. BELCASTRO, W. KARL et A. WILLSKY : Tomographic reconstruction of polygons from knot location and chord length measurements. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Graphical Models and Image Processing*, 58(3):233–245, 1996.
- [5] Y. BRESLER, J. FESSLER et A. MACOVSKI : A Bayesian approach to reconstruction from incomplete projections of a multiple object 3-D domain. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11:840–858, 1989.
- [6] Y. BRESLER et A. MACOVSKI : Three-dimensional reconstruction from projections with incomplete and noisy data by object estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-35(8):1139–1152, 1987.
- [7] X. BRESSON, P. VANDERGHEYNST et J.-P. THIRAN : A variational model for object segmentation using boundary information and shape prior driven by the Mumford-Shah functional. *International Journal of Computer Vision*, 68(2):145–162, juin 2006.
- [8] V. CASELLES, R. KIMMEL et G. SAPIRO : Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1):61–79, février 1997.
- [9] T. CHAN, H. LI, M. LYSAKER et X. TAI : Level Set method for positron emission tomography. *International Journal of Biomedical Imaging*, 2007:1–15, 2007.
- [10] T. CHAN et L. VESE : Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image processing*, 10(2):266–277, février 2001.
- [11] P. CHARBONNIER : *Reconstruction d’image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, septembre 1994.
- [12] P. CHARBONNIER : *Modèles de forme et d’apparence en traitement d’images*. Habilitation à diriger les recherches, Université de Strasbourg, septembre 2009.
- [13] P. CHARBONNIER, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT et M. BARLAUD : Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2):298–311, février 1997.
- [14] Y. CHEN, H. TAGARE, S. THIRUVENKADAM, F. HUANG, D. WILSON, K.S. GOPINATH, R.W. BRIGGS et E.A. GEISER : Using prior shapes in geometric active contours in a variational framework. *International Journal of Computer Vision*, 50(3):315–328, décembre 2002.

- [15] P. CHIAO, W. ROGERS, N. CLINTHORNE, J. FESSLER et A. HERO : Model-based estimation for dynamic cardiac studies using ECT. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(2):217–226, 1994.
- [16] T. COOTES, D. COOPER, C. TAYLOR et J. GRAHAM : Active shape models - their training and application. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(1):38–59, janvier 1995.
- [17] D. CREMERS, T. KOHLBERGER et C. SCHNÖRR : Shape statistics in kernel space for variational image segmentation. *Pattern Recognition : Special Issue on Kernel and Subspace Methods in Computer Vision*, 36(9):1929–1943, septembre 2003.
- [18] D. CREMERS, S. OSHER et S. SOATTO : Kernel density estimation and intrinsic alignment for shape priors in level set segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 69(3):335–351, 2006.
- [19] D. CREMERS, F. SCHMIDT et F. BARTHEL : Shape priors in variational image segmentation : Convexity, Lipschitz continuity and globally optimal solutions. *In IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Anchorage, Alaska, juin 2008.
- [20] D. CREMERS, F. TISCHHÄUSER, J. WEICKERT et C. SCHNÖRR : Diffusion snakes : Introducing statistical shape knowledge into the Mumford-Shah functional. *International Journal of Computer Vision*, 50(3):295–313, décembre 2002.
- [21] E. DEBREUVE, M. BARLAUD, G. AUBERT et J. DARCOURT : Attenuation map segmentation without reconstruction using a level set method in nuclear medicine imaging. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, volume 1, pages 34–38, 1998.
- [22] M.C. DELFOUR et J.P. ZOLÉSIO : *Shape and geometries : analysis, differential calculus and optimization*. Advances in design and control. SIAM, 2001.
- [23] A. DEMPSTER, N. LAIRD et D. RUBIN : Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 39(1):1–38, 1977.
- [24] O. DORN et D. LESSELIER : Level set methods for inverse scattering. *Inverse Problems*, 22(4):R67–R131, 2006.
- [25] O. DORN, E. MILLER et C. RAPPAPORT : A shape reconstruction method for electromagnetic tomography using adjoint fields and level sets. *Inverse Problems*, 16(5):1119—1156, 2000.
- [26] H. FENG : *Curve evolution object-based techniques for image reconstruction and segmentation*. Thèse de doctorat, Université de Boston, 2002.
- [27] H. FENG, W. KARL et D. CASTAÑON : A curve evolution approach to object-based tomographic reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(1):44–57, janvier 2003.
- [28] J. FESSLER et A. MACOVSKI : Object-based 3-D reconstruction of arterial trees from magnetic resonance angiograms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 10:25–39, 1991.
- [29] J. FLUSSER et T. SUK : On the calculation of image moments. Rapport de Recherche 1946, Institute of Information Theory and Automation, Académie des Sciences de la République Tchèque, janvier 1999.

- [30] A. FOULONNEAU : *Une contribution à l'introduction de contraintes géométriques dans les contours actifs orientés région*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur - Strasbourg I, Strasbourg, décembre 2004.
- [31] A. FOULONNEAU, P. CHARBONNIER et F. HEITZ : Geometric shape priors for region-based active contours. *In Proc. IEEE Conference on Image Processing*, volume 3, pages 413–416, Barcelone, Espagne, septembre 2003.
- [32] A. FOULONNEAU, P. CHARBONNIER et F. HEITZ : Affine-invariant geometric shape priors for region-based active contours. *IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(8):1352–1357, août 2006.
- [33] A. FOULONNEAU, P. CHARBONNIER et F. HEITZ : Affine-invariant multi-reference shape priors for active contours. *In 9th European Conference on Computer Vision*, volume 3952 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 601–613, mai 2006.
- [34] A. FOULONNEAU, P. CHARBONNIER et F. HEITZ : Multi-reference shape priors for active contours. *International Journal on Computer Vision*, 81(1):68–81, janvier 2009.
- [35] K. FUNDANA, A. HEYDEN, C. GOSCH et C. SCHNÖRR : Continuous graph cuts for prior-based object segmentation. *In International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, pages 1–4, décembre 2008.
- [36] M. GASTAUD, M. BARLAUD et G. AUBERT : Combining shape prior and statistical features for active contour segmentation. *IEEE Transactions on Circuits Systems and Video Technologies*, 14: 726–734, 2004.
- [37] G. GAULLIER, P. CHARBONNIER et F. HEITZ : Introducing shape priors in object-based tomographic reconstruction. *In 16th International Conference on Image Processing (ICIP'2009)*, pages 1077–1080, Le Caire, Egypte, novembre 2009. IEEE.
- [38] D. GEMAN et G. REYNOLDS : Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(3):367–383, mars 1992.
- [39] D. GEMAN et C. YANG : Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization and FFT's. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(7):932–946, juillet 1995.
- [40] S. GEMAN et D. GEMAN : Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6):721–741, novembre 1984.
- [41] P. GILBERT : Iterative methods for the reconstruction of three dimensional objects from their projections. *Journal of Theoretical Biology*, 36(1):105–117, juillet 1972.
- [42] R. GORDON, R. BENDER et G. HERMAN : Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of Theoretical Biology*, 29(471-482), 1970.
- [43] J. HADAMARD : *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.

- [44] K. HANSON, G. CUNNINGHAM, G. JENNINGS et D. WOLF : Tomographic reconstruction based on flexible geometric models. *In IEEE International Conference on Image Processing*, volume 2, pages 145–147, 1994.
- [45] S. JAGGI, W. KARL et A. WILLISKY : Estimation of dynamically evolving ellipsoids with applications to medical imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 43(2):432–443, 1995.
- [46] S. KACZMARZ : Angenaherte auflösung von systemen linearer gleichungen. *Acad. Pol. Sci. Lett. A*, 6-8A:355–357, 1937.
- [47] A. C. KAK et Malcolm SLANEY : *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 1988.
- [48] M. KASS, A. WITKIN et D. TERZOPOULOS : Snakes : active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4):321–331, janvier 1988.
- [49] J. KIM, M. ÇETIN et A. WILLISKY : Nonparametric shape priors for active contour-based image segmentation. *Signal Processing*, 87(12):3021–3044, 2007.
- [50] M. LEVENTON, W. GRIMSON et O. FAUGERAS : Statistical shape influence in geodesic active contours. *In Proc. of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 1316–1323, Hilton Head Island, USA, juin 2000.
- [51] A. LITMAN, D. LESSELIER et F. SANTOSA : Reconstruction of a two-dimensional binary obstacle by controlled evolution of a level-set. *Inverse Problems*, 14(3):685–706, 1998.
- [52] L. LUCY : An iterative technique for the rectification of observed distributions. *Astronomical Journal*, 79:745–754, juin 1974.
- [53] P. MILANFAR, W. KARL et A. WILLISKY : Reconstructing binary polygonal objects from projections : a statistical view. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Graphical Models and Image Processing*, 56(5):371–391, 1994.
- [54] P. MILANFAR, W. KARL et A. WILLISKY : A moment-based variational approach to tomographic reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(3):459–470, mars 1996.
- [55] E. MILLER, M. KILMER et C. RAPPAPORT : A new shape-based method for object localization and characterization from scattered field data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(4):1682–1696, 2000.
- [56] A. MOHAMMAD-DJAFARI : Image reconstruction of a compact object from a few number of projections. *In IASTED, International Conference on Signal and Image Processing (SIP'96)*, pages 325–329, 1996.
- [57] A. MOHAMMAD-DJAFARI, éditeur. *Problèmes inverses en imagerie et en vision*. IC2 Traité Signal et Image. Hermes Science Publications, Paris, septembre 2009.
- [58] S. OSHER et J.A. SETHIAN : Fronts propagating with curvature-dependant speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1):12–49, novembre 1988.
- [59] F. PRECIOSO et M. BARLAUD : B-spline active contour with handling of topology changes for fast video segmentation. *Eurasip Journal on Applied Signal Processing, special issue : image analysis for multimedia interactive services - PART II*, 2002(6):555–560, June 2002.

- [60] R. RAMLAU et W. RING : A Mumford–Shah level-set approach for the inversion and segmentation of X-ray tomography data. *Journal of Computational Physics*, 221(2):539—557, 2007.
- [61] W. RICHARDSON : Bayesian-based iterative method of image restoration. *J. Opt. Soc. Am.*, 62:55–59, 1972.
- [62] T. RIKLIN-RAVIV, N. KIRYATI et N. SOCHEN : Unlevel-sets : geometry and prior-based segmentation. In *8th European Conference on Computer Vision*, volume 3024 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 50–61, Prague, République Tchèque, mai 2004.
- [63] D. ROSSI et A. WILLSKY : Reconstruction from projections based on detection and estimation of objects-parts I and II : Performance analysis and robustness analysis. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, ASSP-32(4):886–906, 1984.
- [64] M. ROUSSON et N. PARAGIOS : Shape priors for level set representations. In *7th European Conference on Computer Vision (ECCV)*, volume 2351 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 78–93, Copenhagen, Danemark, mai 2002.
- [65] F. SANTOSA : A level-set approach for inverse problems involving obstacles. *The European Series in Applied and Industrial Mathematics : Control, Optimization and Calculus of Variations*, 1:17–33, 1996.
- [66] G. SAPIRO et A. TANNENBAUM : Area and length preserving geometric invariant scale-spaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(1):67–72, janvier 1995.
- [67] L.A. SHEPP et Y. VARDI : Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 2(1):113–122, octobre 1982.
- [68] Y. SHI : *Object-Based Dynamic Imaging With Level Set Methods*. Thèse de doctorat, Université de Boston, USA, 2005.
- [69] C. SOUSSEN et A. MOHAMMAD-DJAFARI : Polygonal and polyhedral contour reconstruction in computed tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(11):1507–1523, novembre 2004.
- [70] A.N. TIKHONOV : Regularization of incorrectly posed problems. *Sov. Math. Dokl.*, 4:1624–1627, 1963.
- [71] A. TSAI, A. YEZZI, W. WELLS, C. TEMPANY, D. TUCKER, A FAN, W. GRIMSON et A. WILLSKY : A shape-based approach to the segmentation of medical imagery using level sets. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(2):137–154, février 2003.
- [72] R. WHITAKER et V. ELANGOVA : A direct approach to estimating surfaces in tomographic data. *Medical Image Analysis*, 6(3):235–249, 2002.
- [73] D. YU et A. FESSLER : Edge-preserving tomographic reconstruction with nonlocal regularization. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(2):159–173, 2002.
- [74] T. ZHANG et D. FREEDMAN : Tracking objects using density matching and shape priors. In *Proc. 9th IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 1056–1062, Nice, France, octobre 2003.